www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures. — COEFFICIENT : 6

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul est autorisé.

NOTATIONS ET OBJECTIF DU PROBLÈME

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $]-1, 1[$ à valeurs complexes telles que l'intégrale $\int_{-1}^{1} |f(t)|^2 \, dt$ converge, muni du produit scalaire hermitien

$$(f, g) \longmapsto (f|g) = \int_{-1}^{1} \overline{f(t)}\, g(t)\, dt. \tag{1}$$

On note N_2 la norme sur E associée à ce produit scalaire, définie par $N_2(f) = (f|f)^{1/2}$.

On désigne par F le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions f continues sur $]-1, 1[$ admettant une limite aux points -1 et 1. On munit F de la norme N_∞ définie par $N_\infty(f) = \sup_{t \in]-1, 1[} |f(t)|$.

On note k la fonction définie sur le carré ouvert $C =]-1, 1[\times]-1, 1[$ par :

$$k(x, t) = -\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{1-t}{2}\right) + \ln\left(\frac{1+x}{2}\right) + 1\right] \quad \text{si} \quad t < x$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{1-x}{2}\right) + \ln\left(\frac{1+t}{2}\right) + 1\right] \quad \text{si} \quad t \geqslant x.$$

Le but du problème est d'étudier l'opérateur U qui, à tout élément f de E, associe la fonction Uf définie sur $]-1, 1[$ par :

$$Uf(x) = \int_{-1}^{1} k(x, t) f(t)\, dt. \tag{2}$$

I. DÉFINITION DE L'OPÉRATEUR U

1. **Propriétés des espaces vectoriels E et F.**

a. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{C}(]-1, 1[)$ des fonctions continues sur $]-1, 1[$ à valeurs complexes.

b. Prouver que, pour tout couple (f, g) d'éléments de E, l'intégrale $\int_{-1}^{1} \overline{f(t)}\, g(t)\, dt$ est absolument convergente. Il en résulte (ce qu'on ne demande pas de vérifier) que la formule (1) définit un produit scalaire sur E.

c. Démontrer que tout élément f de F appartient à E et que $N_2(f) \leqslant \sqrt{2}\, N_\infty(f)$.

d. Prouver que, pour tout élément f de E, l'intégrale $\int_{-1}^{1} f(t)\, dt$ est absolument convergente.

Tournez la page S.V.P.

2. **Étude du noyau k.**

Pour tout élément x de $]-1, 1[$, on note k_x la fonction définie sur $]-1, 1[$ par $k_x(t) = k(x, t)$.

a. Vérifier que, x étant fixé, k_x est continue sur $]-1, 1[$.

b. Établir que, pour tout élément (x, t) de C,

$$|k_x(t)| \leqslant \chi(t), \qquad \text{où} \qquad \chi(t) = \frac{1}{2}\left[1 - \ln\left(\frac{1-t^2}{4}\right)\right].$$

c. Prouver que χ appartient à E. En déduire que, pour tout élément x de $]-1, 1[$, k_x appartient à E et que :

$$N_2(k_x) \leqslant \beta, \qquad \text{où} \qquad \beta = N_2(\chi).$$

(On ne cherchera pas à expliciter β.)

3. **Définition de l'opérateur U.**

Soit f un élément de E.

a. Prouver que, pour tout élément x de $]-1, 1[$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} k(x, t) f(t)\,dt$ est absolument convergente.

On note φ la fonction définie sur $]-1, 1[$ par :

$$\varphi(x) = \int_{-1}^{1} k(x, t) f(t)\,dt = (k_x | f). \tag{2}$$

b. Vérifier que, pour tout élément x de $]-1, 1[$,

$$-2\varphi(x) = \int_{-1}^{x} \ln\left(\frac{1-t}{2}\right) f(t)\,dt + \ln\left(\frac{1+x}{2}\right)\int_{-1}^{x} f(t)\,dt + \int_{x}^{1} \ln\left(\frac{1+t}{2}\right) f(t)\,dt + \ln\left(\frac{1-x}{2}\right)\int_{x}^{1} f(t)\,dt + \int_{-1}^{1} f(t)\,dt. \tag{3}$$

En déduire que φ est continue sur $]-1, 1[$.

c. Établir que, pour tout élément x de $]-1, 1[$,

$$\left|\int_{-1}^{x} f(t)\,dt\right| \leqslant \sqrt{1+x}\, N_2(f) \qquad \text{et} \qquad \left|\int_{x}^{1} f(t)\,dt\right| \leqslant \sqrt{1-x}\, N_2(f).$$

En déduire que φ admet une limite dans C aux points -1 et 1. Ainsi, φ appartient à F.

d. Prouver enfin, grâce à 2.*c.*, que :

$$N_\infty(\varphi) \leqslant \beta N_2(f). \tag{4}$$

Dans toute la suite, on note U l'endomorphisme de E qui à tout élément f de E associe la fonction φ définie par (2).

II. ÉTUDE DE L'OPÉRATEUR U

1. **Continuité et symétrie du noyau k.**

a. Vérifier que, pour tout élément (x, t) de C,

$$k(x, t) = -\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{1 - \inf(x, t)}{2}\right) + \ln\left(\frac{1 + \sup(x, t)}{2}\right) + 1\right].$$

T.S.V.P.

b. En déduire que $k(x, t) = k(t, x)$ et que k est continue sur le carré C. Pour cela, on pourra utiliser les relations :

$$\sup(x, t) = \frac{1}{2}[(t + x) + |t - x|] \quad \text{et} \quad \inf(x, t) = \frac{1}{2}[(t + x) - |t - x|].$$

2. **Symétrie de l'opérateur U.**

On note $(\psi_n)_{n \geqslant 1}$ la suite de fonctions définies sur $]-1, 1[$ par :

$$\begin{cases} \psi_n(t) = 1 \quad \text{si} \quad t \in \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] \\ \psi_n(t) = 0 \quad \text{si} \quad t \in \left]-1, -1 + \frac{1}{2n}\right] \quad \text{ou} \quad t \in \left[1 - \frac{1}{2n}, 1\right[, \\ \psi_n \text{ est affine sur les intervalles } \left[-1 + \frac{1}{2n}, -1 + \frac{1}{n}\right] \text{ et } \left[1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{2n}\right]. \end{cases}$$

a. Étudier la convergence simple, puis uniforme, de la suite (ψ_n).

b. Prouver que, pour tout élément h de E, $N_2(h - h\psi_n)$ converge vers 0. Pour cela, on établira que

$$\int_{-1}^{1} |h(t)|^2 (1 - \psi_n(t))^2 \, dt \leqslant \int_{-1}^{-1+\frac{1}{n}} |h(t)|^2 \, dt + \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} |h(t)|^2 \, dt.$$

c. Établir que, pour tout couple (f, g) d'éléments de E et pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$(U(f\psi_n) | g\psi_n) = (f\psi_n | U(g\psi_n)).$$

Pour cela, on exprimera les deux membres sous forme d'intégrales doubles sur le carré :

$$C_n = \left[-1 + \frac{1}{2n}, 1 - \frac{1}{2n}\right] \times \left[-1 + \frac{1}{2n}, 1 - \frac{1}{2n}\right].$$

d. En déduire que, pour tout couple (f, g) d'éléments de E,

$$(5) \qquad (Uf | g) = (f | Ug).$$

3. **Propriétés de la fonction Uf.**

Soient f un élément de E et $\varphi = Uf$.

a. Prouver que φ est de classe C^1 sur $]-1, 1[$, et que, pour tout élément x de $]-1, 1[$,

$$(6) \qquad -2(x^2 - 1)\varphi'(x) = (x - 1)\int_{-1}^{x} f(t) \, dt + (1 + x)\int_{x}^{1} f(t) \, dt.$$

En déduire que la fonction $x \mapsto (x^2 - 1)\varphi'(x)$ admet 0 pour limite aux points -1 et 1.

b. Prouver que φ est de classe C^2 sur $]-1, 1[$, et que, pour tout élément x de $]-1, 1[$,

$$(7) \qquad (x^2 - 1)\varphi''(x) + 2x\varphi'(x) = f(x) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t) \, dt.$$

Tournez la page S.V.P.

4. Effet de l'opérateur U sur les polynômes.

Pour tout entier naturel p, on note F_p le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à p.

a. Soit a un polynôme constant. À l'aide de (6), déterminer $(Ua)'$. Prouver alors que $Ua = 0$ en utilisant la relation (3).

b. Soit P un élément de F_p, où $p \geqslant 1$. À l'aide de la formule de Taylor, exprimer $\int_{-1}^{x} P(t)\,dt$ en fonction des dérivées successives de P au point -1, et $\int_{x}^{1} P(t)\,dt$ en fonction des dérivées successives de P au point 1. À l'aide de (6), en déduire que $(UP)'$ appartient à F_{p-1}, puis que UP appartient à F_p.

5. **Noyau et image de** U.

On note V l'application linéaire qui à toute fonction ψ de classe C^2 sur $]-1, 1[$ associe la fonction continue $V\psi$ définie par :

$$V\psi(x) = (x^2 - 1)\psi''(x) + 2x\psi'(x) = \frac{d}{dx}[(x^2 - 1)\psi'(x)].$$

La relation (7) s'écrit alors :

$$V \circ U(f) = f - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\,dt. \tag{7}$$

a. Prouver que Ker U est la droite vectorielle $\mathbb{C}1$.

b. Soit H l'orthogonal de Ker U, constitué des éléments h de E tels que $(1|h) = \int_{-1}^{1} h(t)\,dt = 0$.

Prouver que E est somme directe de $\mathbb{C}1$ et H et expliciter les projecteurs associés.

c. À l'aide de (5), prouver que tout élément $\varphi = Uf$ de Im U appartient à H.

d. Soit G le sous-espace de $F \cap H$ constitué des fonctions ψ de classe C^2 sur $]-1, 1[$, telles que $\lim_{x \to -1} (x^2 - 1)\psi'(x) = 0$, $\lim_{x \to 1} (x^2 - 1)\psi'(x) = 0$, et que $V\psi$ appartienne à E.

Prouver que Im U est contenu dans G.

e. Soit χ un élément de G tel que $V\chi = 0$. Prouver que $\chi = 0$.

f. Établir que Im U = G. À cet effet, on considérera un élément ψ de G, on posera $f = V\psi$ et on établira que $V(\psi - Uf) = 0$.

g. Prouver enfin que U définit un isomorphisme de H sur G, dont l'isomorphisme réciproque est défini par V.

T.S.V.P

III. VALEURS PROPRES ET SOUS-ESPACES PROPRES DE U

1. Prouver que toutes les valeurs propres de U sont réelles et que ses sous-espaces propres sont orthogonaux deux à deux.

2. Soit $(P_n)_{n \geq 0}$ la suite de polynômes définis par :

(8) $$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}[(x^2 - 1)^n].$$

a. Déterminer le degré de P_n.

b. À l'aide d'intégrations par parties, montrer que les polynômes P_n sont orthogonaux deux à deux, et que

$$(P_n|P_n) = \frac{2}{2n + 1}.$$

On pose désormais $L_n = \sqrt{n + \frac{1}{2}}\, P_n$, de telle sorte que $N_2(L_n) = 1$.

c. Montrer que tout élément P de F_n orthogonal à F_{n-1} est colinéaire à L_n. En déduire que L_n est vecteur propre de l'endomorphisme U. Soit λ_n la valeur propre correspondante ; en particulier, $\lambda_0 = 0$.

d. Soit n un entier strictement positif. Prouver que $\lambda_n \neq 0$ et que $V(L_n) = \frac{1}{\lambda_n} L_n$.

En déduire que $\lambda_n = \frac{1}{n(n + 1)}$.

3. On admet que toute fonction continue sur $[-1, 1]$ est limite uniforme sur cet intervalle d'une suite de polynômes.

a. En déduire que, pour tout élément f de E, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme Q tel que $N_2(f - Q) \leq \varepsilon$ (on pourra utiliser II.2.*b.*). Prouver que f est limite dans E d'une suite (Q_n) de polynômes.

b. Soit f un élément de E orthogonal à tous les polynômes L_n. Prouver que $f = 0$.

c. En déduire que toute valeur propre de λ de U est égale à l'un des nombres λ_n. En déduire aussi que, pour tout $n > 0$, le sous-espace propre E_{λ_n} de U associé à λ_n est de dimension 1. (Étant donné un élément g de E_{λ_n}, on pourra considérer $f = g - (L_n|g)\, L_n$.)

IV. DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES ASSOCIÉS

Pour tout élément f de F_p, et tout entier $p \geq 0$, on pose $S_p(f) = \sum_{n=0}^{p} (L_n|f) L_n$.

1. **Convergence de S_p en moyenne quadratique.**

a. Prouver que pour tout élément Q de F_p,

$$N_2(f - S_p(f)) \leq N_2(f - Q).$$

b. En déduire que $N_2(f - S_p(f))$ décroît et converge vers 0.

Ainsi, $S_p(f)$ converge vers f dans E lorsque p tend vers $+\infty$, ce qu'on notera :

(9) $$f = \sum_{n=0}^{+\infty} (L_n|f) L_n.$$

c. Prouver que $(f|f) = \sum_{n=0}^{+\infty} |(L_n|f)|^2$.

Tournez la page S.V.P.

2. **Calcul de la norme uniforme de L_n.**

a. Soit n un entier strictement positif.

En utilisant l'équation différentielle $V(L_n) = n(n+1)L_n$, établir que, pour tout élément x de $[0, 1]$

$$\frac{d}{dx}\left[(x^2-1)L_n'^2\right] \leqslant n(n+1)\frac{d}{dx}(L_n^2).$$

b. En déduire que, pour $x \in [0, 1]$, $L_n^2(x) \leqslant L_n^2(1)$.

En étudiant la parité du polynôme L_n, étendre cette relation pour tout élément x de $[-1, 1]$.

c. À partir de (8), calculer $P_n(1)$, puis $L_n(1)$.

d. Prouver finalement que, pour tout $n \geqslant 0$,

(10) $$N_\infty(L_n) = \sqrt{n+\frac{1}{2}}.$$

3. **Convergence uniforme de S_p.**

a. Soit φ un élément de $G = \text{Im } U$, écrit sous la forme $\varphi = U(f)$, où f appartient à H. Établir que, pour tout $n \geqslant 1$,

(11) $$(L_n|\varphi) = \frac{1}{n(n+1)}(L_n|f).$$

En déduire que $(L_n|\varphi)$ est négligeable devant $\frac{1}{n^2}$, et que la série $\sum_{n=1}^{+\infty}(L_n|\varphi)L_n$ converge normalement vers φ sur $]-1, 1[$.

b. Prouver que, pour toute fonction ψ de classe C^2 sur $[-1, 1]$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(L_n|\psi)L_n$ converge normalement vers ψ sur $[-1, 1]$.

4. **Résolution d'une équation intégrale.**

On considère l'équation :

(12) $$\lambda f - Uf = g,$$

où λ est un nombre complexe non nul donné et g est un élément donné de E, dont on cherche les solutions f dans E.

a. Soit f une telle solution, si elle existe. Prouver que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\left[\lambda - \frac{1}{n(n+1)}\right](L_n|f) = (L_n|g).$$

b. En déduire que si λ est distinct des valeurs propres de U, l'équation (12) admet une solution et une seule, à savoir :

$$f = \frac{1}{\lambda}\left[g + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(L_n|g)}{n(n+1)\lambda - 1}L_n\right],$$

cette série étant normalement convergente sur $]-1, 1[$.

c. On suppose que $\lambda = \frac{1}{p(p+1)}$, où p est entier strictement positif.

Étudier l'existence et l'unicité des solutions de (12).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail